Université Denis Diderot (Paris 7) — **MM1**
Mathématiques — **2 novembre 2013**

Exercice 1

1. Soit E un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. À quelles conditions E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?
2. Le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{array} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Considérons les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
2. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3

1. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. À quelles conditions E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Considérons les sous-espaces vectoriels
$$E = \mathrm{Vect}((1, -1, 0)) \qquad \& \qquad F = \mathrm{Vect}((0, 1, -1), (2, 0, -2));$$
sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Considérons les sous-espaces vectoriels
$$E' = \mathrm{Vect}((1, 0, 0)) \qquad \& \qquad F' = \mathrm{Vect}((0, 2, 0), (0, 0, 3));$$
sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$E = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (3, 0, 5)).$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Donner un système d'équations cartésiennes de E.